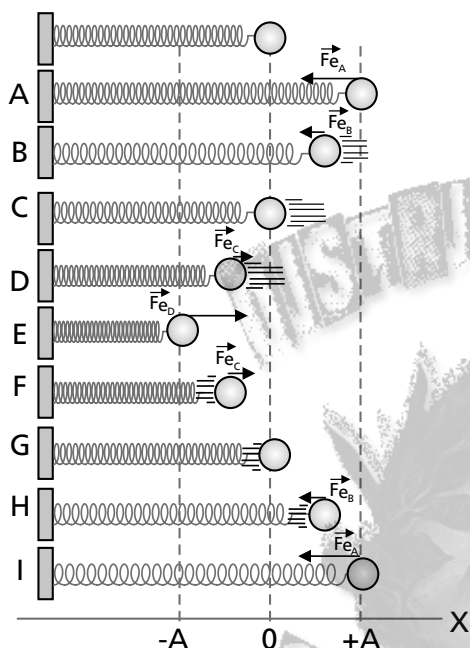


Aulas 11 e 12

Movimento Harmônico Simples

Esse movimento é caracterizado por ser periódico (repete-se em intervalos de tempo regulares) e oscilatório (a trajetória de ida é a mesma da volta). Uma das funções matemáticas que conhecemos e que pode representar repetições, por ser uma função periódica, é a função cosseno (o seno também funcionaria).

Um exemplo muito comum de algo que realize esse tipo de movimento é a "massa-mola":

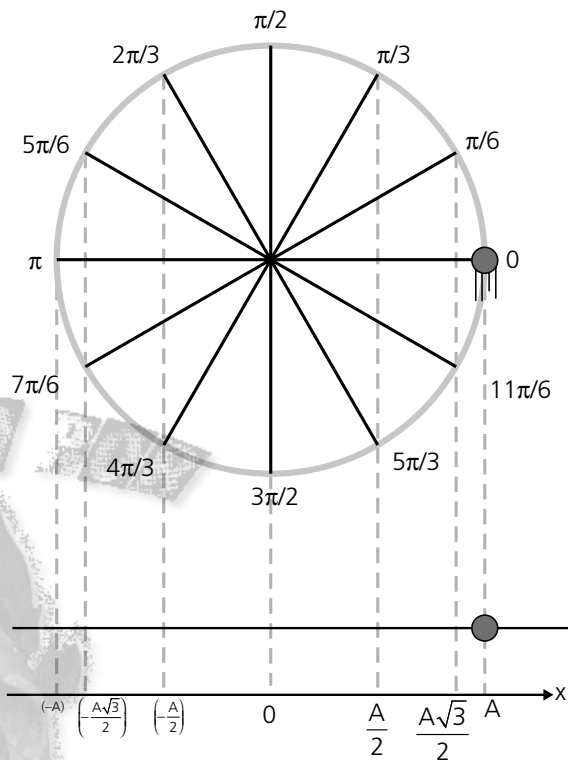


Quando esticamos a mola e a soltamos, verificamos que a massa passa a executar um movimento de vaivém. Esse movimento pode ser descrito pela seguinte equação:

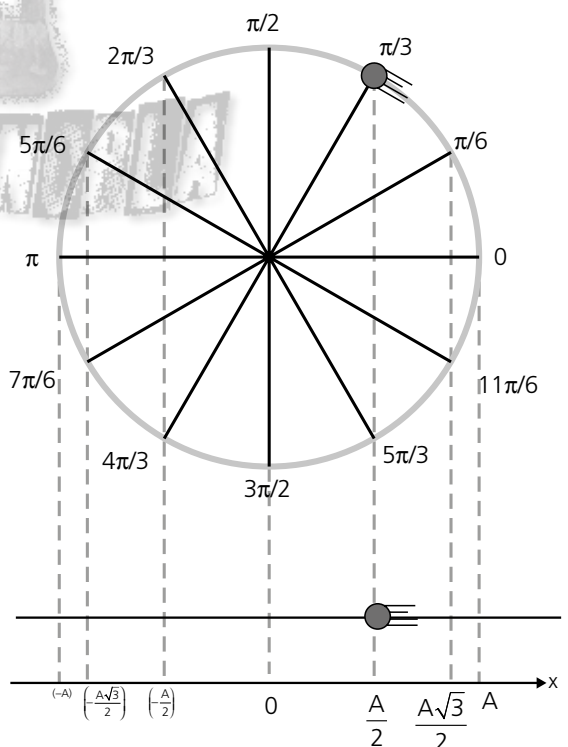
$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

- **Amplitude (A):** representa a maior distância possível para esse móvel em relação à posição $x = 0$, ou seja, o máximo valor da deformação sofrida pela mola.
- **Pulsuação (ω):** corresponde a $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, onde T é o período de repetição do movimento e f é a frequência do movimento.
- **Frequência (f):** é o número de vezes que um evento ocorre dividido pelo intervalo de tempo, para a ocorrência de um evento apenas, transcorre-se o intervalo de tempo de um período. Portanto: $f = \frac{\text{Nº de repetições}}{\Delta t} = \frac{1}{T}$. No Sistema Internacional de Unidades, a frequência pode ser medida em s^{-1} ou em Hz.
- **Fase (φ):** $\varphi = \omega t + \varphi_0$ é o argumento da função cosseno (aquilo que está dentro dos parênteses da função), representando a posição do móvel e o sentido do movimento dele.

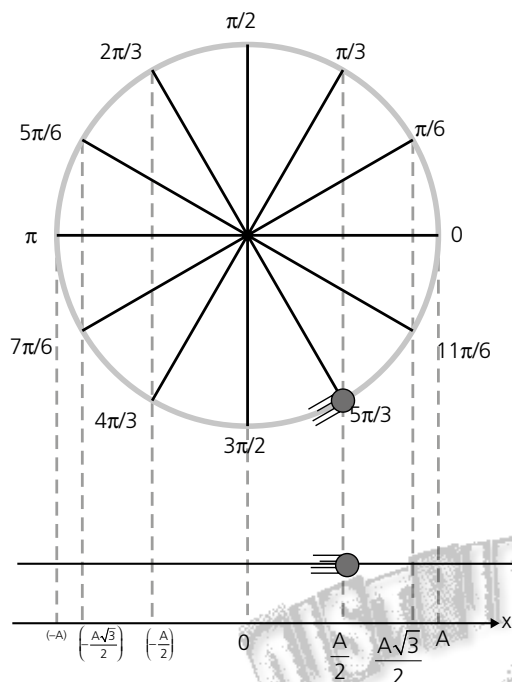
Pode-se fazer uma analogia entre a fase do MHS e o ângulo do MCU. Para tanto, vamos estudar o MHS como uma sombra (projecção) do MCU:



Quando o MHS está na posição $x = A$, dizemos que a fase dele é 0 rad.



Quando o MHS está na posição $x = \frac{A}{2}$ em movimento retrógrado, dizemos que a fase dele é $\frac{\pi}{3}$ rad.



Agora atente! Quando o MHS está na posição $x = \frac{A}{2}$ em movimento progressivo, dizemos que a fase dele é $5\frac{\pi}{3}$ rad.

Fase inicial: φ_0 representa as condições iniciais do movimento.

Resumo das equações

Considerando o MHS uma projeção do movimento harmônico simples no eixo x , chega-se às equações a seguir:
Elongação.

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Velocidade instantânea.

$$v_{\text{MHS}} = -\omega \cdot A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

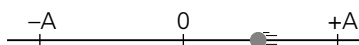
Aceleração.

$$\alpha = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\alpha = -\omega^2 \cdot x$$

Valores máximos

Baseiam-se no fato de que os valores do seno e do cosseno variam de -1 e 1 .



x	$-A$	0	A
v	0	$\pm\omega A$	0
a	$+\omega^2 A$	0	$-\omega^2 A$

$$v_{\text{máx}} = \omega A \text{ (ocorre quando } x = 0 \text{)}$$

$$\alpha_{\text{máx}} = \omega^2 A \text{ (ocorre quando } x = \pm A \text{)}$$

Note, na tabela anterior, que a velocidade é nula nos extremos, indicando a inversão do sentido do movimento.

Observe também que, nos extremos, por estar muito afastado do ponto de equilíbrio, o valor da força resultante é máxima e, portanto, a aceleração também é máxima.

Força no MHS

Da função horária da aceleração e da elongação:

$$\alpha = -\omega^2 \cdot x$$

Da Segunda Lei de Newton:

$$F = m \cdot \alpha = -m \cdot \omega^2 \cdot x$$

Já que a massa e a pulsação do MHS são constantes, chama-se $m\omega^2$ de **constante de força** do MHS. Logo,

$$F = -Kx$$

Ou seja, a força é diretamente proporcional à elongação, entretanto, possui sentido contrário a ela. Recebe, com isso, o nome de **força restauradora**. Isso ocorre também porque ela está sempre no sentido de restaurar a posição de equilíbrio, $x = 0$.

Ponto de equilíbrio

O **ponto de equilíbrio** de um MHS é o ponto central da trajetória, ou seja, é o ponto de elongação x igual a zero.

Assim, para $x = 0$, a força resultante sobre o oscilador é igual a zero.

Período do MHS

No item anterior, definiu-se a constante de força K do MHS como sendo $K = m\omega^2$.

Dai se obtém uma expressão para a pulsação do MHS:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Lembrando que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Como a frequência f é igual ao inverso do período,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

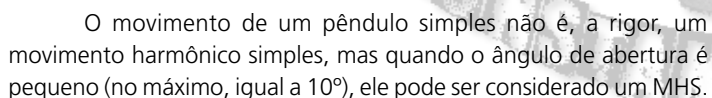
Oscilador massa-mola

Após descolar o corpo preso à mola de sua posição de equilíbrio e abandoná-lo à ação da força elástica, ele executará um MHS.

A elongação no MHS é, em módulo, igual à própria deformação (distensão ou contração) da mola.

A força resultante no corpo é a própria força elástica aplicada pela mola.

No ponto de equilíbrio, a força elástica (resultante) é nula, e a mola não está deformada.



É possível demonstrar que o período do pêndulo simples depende apenas do comprimento do fio e do valor da gravidade no local:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Destaque-se que o período de oscilação do pêndulo simples:

- independe da massa pendular;
- é proporcional à raiz quadrada do seu comprimento;
- é inversamente proporcional à raiz quadrada da intensidade do campo gravitacional.



01. (Efomm) Um pêndulo simples de comprimento L está fixo ao teto de um vagão de um trem, que se move horizontalmente com aceleração a . Assinale a opção que indica o período de oscilações do pêndulo.

$$A) \left(\frac{4\pi^2 L^2}{\sqrt{a^2 - 1}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

B) $2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$

C) $2\pi \sqrt{\frac{2L}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$

$$D) 2\pi \sqrt{\left(\frac{L^2}{g^2 + a^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$E) \pi \sqrt{\frac{L}{2g}}$$

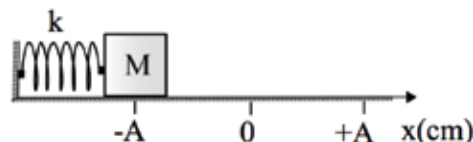
02. (Efomm) Um cubo de 25,0 kg e 5,0 m de lado flutua na água. O cubo é, então, afundado ligeiramente para baixo por Dona Marize e, quando liberado, oscila em um movimento harmônico simples com uma certa frequência angular. Desprezando-se as forças de atrito, essa frequência angular é igual a:

- A) 50 rad/s
B) 100 rad/s
C) 150 rad/s
D) 200 rad/s
E) 250 rad/s

03. (Efomm) Um pequeno bloco de massa $0,500 \text{ kg}$ está suspenso por uma mola ideal de constante elástica 200 N/m . A outra extremidade da mola está presa ao teto de um elevador que, inicialmente, conduz o sistema mola/bloco com uma velocidade de descida constante e igual a $2,00 \text{ m/s}$. Se, então, o elevador parar subitamente, a partícula irá vibrar com uma oscilação de amplitude, em centímetros, igual a

- A) 2,00
B) 5,00
C) 8,00
D) 10,0
E) 13,0

04. (Efomm) O bloco de massa M da figura é, em $t = 0$, liberado do repouso na posição indicada ($x = -A$) e a seguir executa um MHS com amplitude $A = 10 \text{ cm}$ e período de $1,0 \text{ s}$. No instante $t = 0,25 \text{ s}$, o bloco se encontra na posição onde



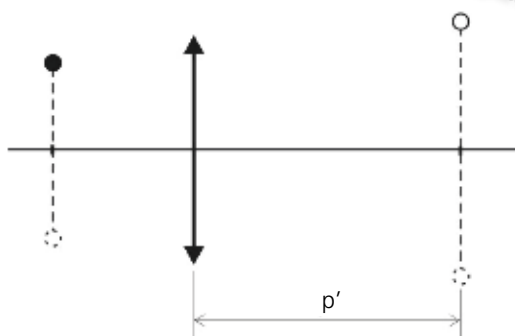
- A) a energia mecânica é o dobro da energia cinética.
B) a energia mecânica é o dobro da energia potencial elástica.
C) a energia cinética é o dobro da energia potencial elástica.
D) a energia mecânica é igual à energia potencial elástica.
E) a energia mecânica é igual à energia cinética.

COMO A HIPERMETROPIA ACONTECE NA INFÂNCIA

É muito comum bebês e crianças apresentarem algum tipo de erro refrativo, e a hipermetropia é o caso mais constante. Isso porque este tipo de ametropia (erro de refração) pode se manifestar desde a fase de recém-nascido. A hipermetropia é um erro de refração caracterizado pelo modo em que o olho, menor do que o normal, foca a imagem atrás da retina. Consequentemente, isso faz com que a visão de longe seja melhor do que a de perto. (...) De acordo com a Dra. Liana, existem alguns fatores que podem influenciar a incidência de hipermetropia em crianças, como o ambiente, a etnia e, principalmente, a genética. "As formas leves e moderadas, com até seis dioptrias, são passadas de geração para geração (autossômica dominante). Já a hipermetropia elevada é herdada dos pais (autossômica recessiva)", explicou a especialista. A médica ainda relatou a importância em identificar, prematuramente, o comportamento hipermetrope da criança, caso contrário, esse problema pode afetar a rotina visual e funcional delas. "A falta de correção da hipermetropia pode dificultar o processo de aprendizado, e ainda pode reduzir, ou limitar, o desenvolvimento nas atividades da criança. Em alguns casos, pode ser responsável por repetência, evasão escolar e dificuldade na socialização, requerendo ações de identificação e tratamento", concluiu a Dra. Liana. Os sintomas relacionados à hipermetropia, além da dificuldade de enxergar de perto, variam entre: dores de cabeça, fadiga ocular e dificuldade de concentração em leitura. (...) O tratamento utilizado para corrigir este tipo de anomalia é realizado através da cirurgia refrativa. O uso de óculos (com lentes esféricas) ou lentes de contato corretivas é considerado método convencional, que pode solucionar o problema visual do hipermetrope.

Disponível em: <https://www.cbo.net.br>. Acesso em: 18 fev. 2017.

De acordo com o texto anterior, a hipermetropia pode ser corrigida com o uso de lentes esféricas. Dessa maneira, uma lente corretiva, delgada e gaussiana, de vergência igual a +2 di, conforme figura a seguir, é utilizada para projetar, em um anteparo colocado a uma distância p' da lente, a imagem de um corpo luminoso que oscila em movimento harmônico simples (MHS). A equação que descreve o movimento oscilatório desse corpo é $y = (0,1) \sin\left[4t + \frac{\pi}{2}\right]$.



Considere que a equação que descreve a oscilação projetada no anteparo é dada por $y = (0,5) \sin\left[4t + \frac{3\pi}{2}\right]$ (SI).

Nessas condições, a distância p' , em cm, é

- A) 100
- B) 200
- C) 300
- D) 400



Exercícios Propostos

01. (AFA) Uma partícula de massa m pode ser colocada a oscilar em quatro experimentos diferentes, como mostra a figura 1 a seguir.

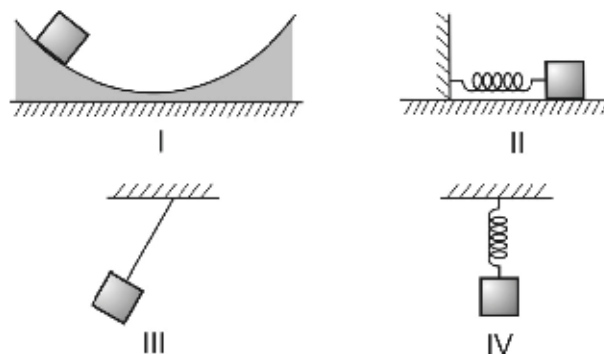


Figura 1

Para apenas duas dessas situações, tem-se o registro do gráfico senoidal da posição da partícula em função do tempo, apresentado na figura 2.

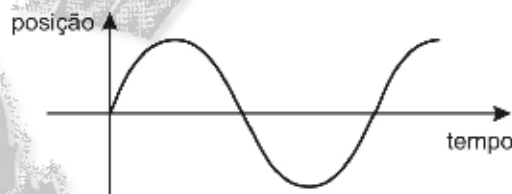


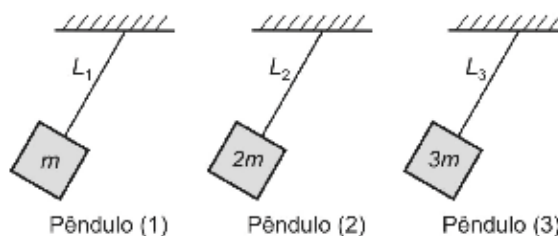
Figura 2

Considere que não existam forças dissipativas nos quatro experimentos; que, nos experimentos II e IV, as molas sejam ideais e que as massas oscilem em trajetórias perfeitamente retilíneas; que no experimento III o fio conectado à massa seja ideal e inextensível; e que nos experimentos I e III a massa descreva uma trajetória que é um arco de circunferência.

Nessas condições, os experimentos em que a partícula oscila certamente em movimento harmônico simples são, apenas

- A) I e III
- B) II e III
- C) III e IV
- D) II e IV

02. (AFA) Três pêndulos simples 1, 2 e 3 que oscilam em MHS possuem massas respectivamente iguais a m , $2m$ e $3m$ são mostrados na figura abaixo.



Os fios que sustentam as massas são ideais, inextensíveis e possuem comprimento respectivamente L_1 , L_2 e L_3 . Para cada um dos pêndulos registrou-se a posição (x), em metro, em função do tempo (t), em segundo, e os gráficos desses registros são apresentados nas figuras 1, 2 e 3 a seguir.

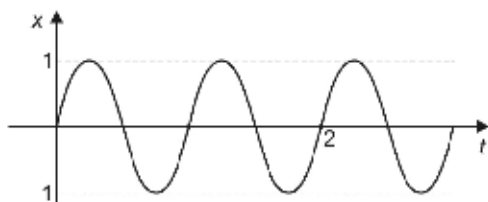


Figura 1 - Pêndulo (1)



Figura 2 - Pêndulo (2)

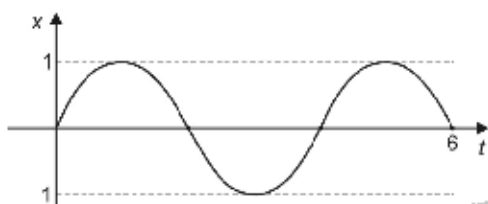
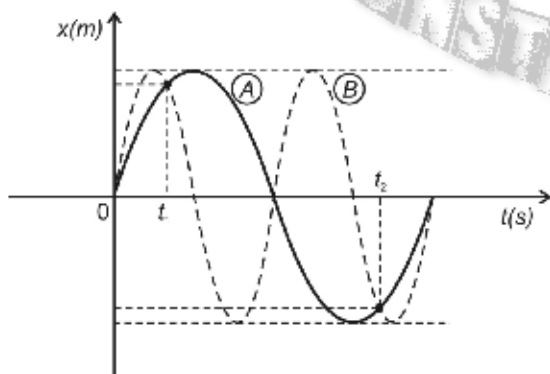


Figura 3 - Pêndulo (3)

Considerando a inexistência de atritos e que a aceleração da gravidade seja $g = \pi^2 \text{ m/s}^2$, é correto afirmar que

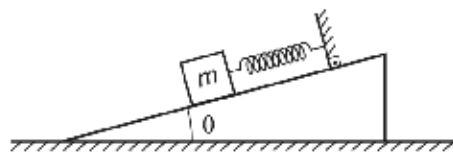
- A) $L_1 = \frac{L_2}{3}$; $L_2 = \frac{2}{3}L_3$ e $L_3 = 3L_1$
 B) $L_1 = 2L_2$; $L_2 = \frac{L_3}{2}$ e $L_3 = 4L_1$
 C) $L_1 = \frac{L_4}{4}$; $L_2 = \frac{L_3}{2}$ e $L_3 = 16L_1$
 D) $L_1 = 2L_2$; $L_2 = 3L_3$ e $L_3 = 6L_1$
03. (AFA) A figura a seguir apresenta os gráficos da posição (x) em função do tempo (t) para dois sistemas A e B de mesma massa m , que oscilam MHS, de igual amplitude.



Sendo E_{CA} e E_{CB} as energias cinéticas dos sistemas A e B respectivamente no tempo t_1 ; E_{PA} e E_{PB} as energias potenciais dos sistemas A e B respectivamente no tempo t_2 , é correto afirmar que

- A) $E_{CA} = E_{CB}$
 B) $E_{PA} > E_{PB}$
 C) $E_{CA} > E_{CB}$
 D) $E_{PB} > E_{PA}$

04. (AFA) Em um local onde a aceleração da gravidade é constante, um corpo de massa m , com dimensões desprezíveis, é posto a oscilar, unido a uma mola ideal de constante elástica k , em um plano fixo e inclinado de um ângulo θ , como mostra a figura a seguir.

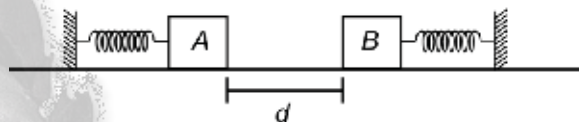


Nessas condições, o sistema massa-mola executa um movimento harmônico simples de período T . Colocando-se o mesmo sistema massa mola para oscilar na vertical, também em movimento harmônico simples, o seu novo período passa a ser T' .

Nessas condições, a razão T/T' é

- A) 1
 B) $\sin\theta$
 C) $\frac{1}{2}$
 D) $\frac{1}{\sin\theta}$

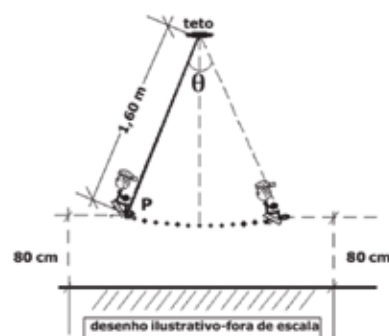
05. (AFA) Dois corpos, de dimensões desprezíveis, A e B presos a molas ideais, não deformadas, de constantes elásticas k_A e k_B , respectivamente, estão, inicialmente, separados de uma distância d em uma plataforma sem atrito como mostra a figura a seguir.



A partir dessa situação, os blocos são então lentamente puxados por forças de mesma intensidade, aproximando-se, até se encostarem. Em seguida, são abandonados, passando a oscilar em movimento harmônico simples. Considere que não haja interação entre os blocos quando esses se encontram. Nessas condições, a soma das energias mecânicas dos corpos A e B será

- A) $\frac{k_A k_B d^2}{2(k_A + k_B)}$
 B) $\frac{k_A^2 d^2}{2k_B (k_A + k_B)^2}$
 C) $\frac{k_A k_B d^2}{2(k_A + k_B)^2}$
 D) $\frac{k_B^2 d^2}{2k_A (k_A + k_B)}$

06. (EsPCEX) Uma criança de massa 25 kg brinca em um balanço cuja haste rígida não deformável e de massa desprezível, presa ao teto, tem 1,60 m de comprimento. Ela executa um movimento harmônico simples que atinge uma altura máxima de 80 cm em relação ao solo, conforme representado no desenho a seguir, de forma que o sistema "criança mais balanço" passa a ser considerado como um pêndulo simples com centro de massa na extremidade P da haste. Pode-se afirmar, com relação à situação exposta, que



Dados: intensidade da aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$ considere o ângulo de abertura não superior a 10°

- A) a amplitude do movimento é 80 cm.
 B) a frequência de oscilação do movimento é 1,25 Hz.
 C) o intervalo de tempo para executar uma oscilação completa é de $0,8\pi$ s.
 D) a frequência de oscilação depende da altura atingida pela criança.
 E) o período do movimento depende da massa da criança.

07. (EsPCEEx) Peneiras vibratórias são utilizadas na indústria de construção para classificação e separação de agregados em diferentes tamanhos. O equipamento é constituído de um motor que faz vibrar uma peneira retangular, disposta no plano horizontal, para separação dos grãos. Em uma certa indústria de mineração, ajusta-se a posição da peneira de modo que ela execute um movimento harmônico simples (MHS) de função horária $x = 8 \cos(8\pi t)$, onde x é a posição medida em centímetros e t o tempo em segundos.

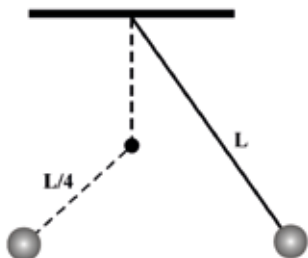
O número de oscilações a cada segundo executado por esta peneira é de

- A) 2
 B) 4
 C) 8
 D) 16
 E) 32

08. (EsPCEEx) Uma mola ideal está suspensa verticalmente, presa a um ponto fixo no teto de uma sala, por uma de suas extremidades. Um corpo de massa 80 g é preso à extremidade livre da mola e verifica-se que a mola desloca-se para uma nova posição de equilíbrio. O corpo é puxado verticalmente para baixo e abandonado de modo que o sistema massa-mola passa a executar um movimento harmônico simples. Desprezando as forças dissipativas, sabendo que a constante elástica da mola vale $0,5 \text{ N/m}$ e considerando $\pi = 3,14$, o período do movimento executado pelo corpo é de

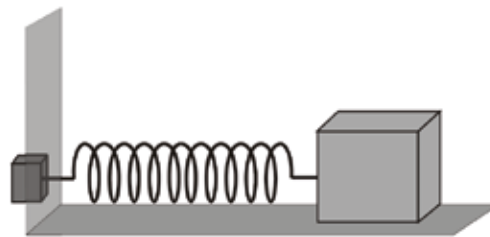
- A) 1,256 s
 B) 2,512 s
 C) 6,369 s
 D) 7,850 s
 E) 15,700s

09. Um pêndulo simples de comprimento L tem período T . Um obstáculo é colocado de tal forma que quando o pêndulo é solto da posição à direita (linha contínua), ele adquire na extremidade esquerda a configuração mostrada pela linha pontilhada da figura. Qual o período de oscilação deste novo sistema?

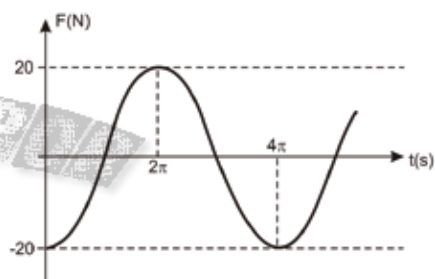


- A) $T/4$
 B) $T/2$
 C) $3T/4$
 D) T

10. Um determinado tipo de sensor usado para medir forças, chamado de sensor piezoelétrico, é colocado em contato com a superfície de uma parede, onde se fixa uma mola. Dessa forma, pode-se medir a força exercida pela mola sobre a parede. Nesse contexto, um bloco, apoiado sobre uma superfície horizontal, é preso a outra extremidade de uma mola de constante elástica igual a 100 N/m , conforme ilustração a seguir.



Nessa circunstância, fazendo-se com que esse bloco descreva um movimento harmônico simples, observa-se que a leitura do sensor é dada no gráfico a seguir.



Com base nessas informações é correto afirmar que a velocidade máxima atingida pelo bloco, em m/s, é de:

- A) 0,1
 B) 0,2
 C) 0,4
 D) 0,8
 E) 1,0

Gabarito

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Aulas 11 e 12: Movimento Harmônico Simples				
1	2	3	4	5
D	B	D	E	C

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Aulas 11 e 12: Movimento Harmônico Simples									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	C	D	A	A	C	B	B	C	A